FRACTAIS – A LINGUAGEM DO CAOS

"Anais do Clube Militar Naval"
Alberto Mesquita e Manuel G. Mota

INTRODUÇÃO

Os Fenômenos Caóticos, bem como a Geometria Fractal, têm sido, nos últimos anos, alvo das investigações de muitos cientistas em todo o mundo. As técnicas fractais em particular, mais do que um ramo da Matemática, têm-se revelado uma ferramenta extremamente útil a muitas Ciências, mesmo as Sociais, permitindo uma linguagem comum entre especialistas de diferentes áreas.

Num universo despovoado de formas geométricas perfeitas, onde proliferam superfícies irregulares, difíceis de representar e medir, a geometria fractal apresenta-se como um meio de tratar aqueles fenômenos até agora considerados erráticos, imprevisíveis e aleatórios, numa palavra, caóticos.

O atrito, a turbulência de uma massa de ar, ou o crescimento de uma população, são exemplos de sistemas dinâmicos não-lineares sobre os quais esta 'Ciência do Caos', através do uso de formas fractais, se debruça, encontrando-se indissociavelmente ligada aos computadores com a sua elevada velocidade de processamento e capacidades gráficas, a cuja inovação e beleza não podemos ficar indiferentes.

A aplicação prática dos fractais é cada vez maior, constituindo uma maneira nova de encarar a realidade e também uma ferramenta científica de enorme alcance que agora está a dar os seus primeiros passos, podendo mesmo prever-se que dentro de pouco tempo, venha a ser incluída regularmente no curriculum de vários cursos, tendo em conta a larga disseminação de computadores nas escolas. No entanto, aquilo que mais contribui para a sua divulgação é certamente a espetacularidade das suas imagens que no mínimo se podem considerar intrigantes e bizarras.

A intenção dos autores, não é a de abordar o assunto de uma maneira formal, mas tão somente, transmitir algumas idéias e princípios que permitam apreender alguns dos conceitos chave, atrair a curiosidade para o tema e, quem sabe, constituir um ponto de partida para futuras investigações pessoais.

CONSIDERAÇÕES GERAIS

A palavra 'Fractal' criada em 1975 por B. Mandelbrot deriva do Latim, 'fractus', o adjetivo de 'frangere', que significa 'quebrar' e constitui a palavra-chave de um tema que pode ser encarado sob vários pontos de vista.

Torna-se, portanto, necessário, começar por uma panorâmica geral sobre o tema, referindo em termos gerais as diferentes perspectivas segundo as quais o podemos encarar.

Perspectiva Matemática

Os fractais constituíram certamente uma surpresa e até mesmo um abalo para muitos matemáticos. De repente, viram-se confrontados com técnicas e imagens que, se por um lado eram altamente sugestivas, por outro, não conseguiam ser justificadas nem englobadas em situações anteriormente conhecidas. Assim, ao mesmo tempo em que uns, com a ajuda do computador, e guiados pela sua intuição tentavam encontrar sentido nos resultados que obtinham, outros, esforçavam-se por produzir definições e demonstrações em termos matemáticos tradicionais. Deste ponto de vista, é de conceitos matemáticos que se está a tratar, pelo que qualquer outro método de abordagem, poderia até vir a ser considerado menos sério.

Há portanto, quem considere a geometria fractal como um ramo da Matemática, com muitas das suas propriedades e demonstrações já estabelecidas e que apesar das suas particularidades, se integra perfeitamente no vasto e sólido edifício da Matemática.

Perspectiva Lúdica e Artística

Este é, com certeza, o aspecto que mais atrai as pessoas para o assunto. É por assim dizer, a sua 'imagem de marca'. Qualquer um que possua um PC com uma placa gráfica razoável, pode através das técnicas fractais, produzir imagens verdadeiramente espetaculares. São extremamente belas, atraentes e profundamente intrigantes, permitindo a intervenção criativa de cada um a fim de produzir o seu próprio fractal. Além de abrir espaço à criatividade através da atribuição de cores, dimensões e perspectivas às imagens, mais do que isso, permitem a descoberta de novas imagens, sempre diferentes, uma vez que os fractais, são por definição, infinitos. Cada imagem pode ser sucessivamente ampliada, desvendando a pouco e pouco os seus 'padrões de rendilhados infinitos', juntando por isso os fatores de surpresa e expectativa cada vez que uma nova imagem fractal é gerada. Há mesmo quem aproveite para criar verdadeiras obras de arte, cenários com paisagens de outros planetas para filmes de ficção ou ainda, 'música fractal'.

De qualquer maneira, e apesar de os algoritmos que geram essas imagens serem relativamente simples, a quantidade de operações que o computador tem de realizar, é de tal modo elevada que mesmo com um co-processador matemático, isso pode demorar várias horas.

No manual de um programa de fractais podemos ler: 'Não nos responsabilizamos pelos transes intermináveis que inflija a si próprio'.

Perspectiva Filosófica

Uma das questões que já há muito atrai pensadores e cientistas é a que põe frente-a-frente duas maneiras distintas de encarar o Universo. Uma, a determinista, que considera que se num determinado momento conseguíssemos abarcar a informação sobre a posição e velocidade de todas as partículas que constituem o Universo, então poderíamos prever com rigor absoluto, o que se iria passar nos instantes seguintes, e por isso, o futuro.

A outra, fortemente apoiada na teoria quântica, que afirma existir obrigatoriamente incerteza relativamente à posição e velocidade simultâneas de um átomo, dando lugar à existência de fenômenos aleatórios e imprevisíveis.

Relativamente a esta questão, a Ciência do Caos, traz uma lufada de ar fresco, respondendo à maneira de Poincaré em 1903, com a noção de 'elevada sensibilidade a variações das condições iniciais' conforme será abordado no capítulo Caos.

Uma outra questão de grande importância, relaciona-se com a habilidade de os simples algoritmos que constituem os fractais, representarem os fenômenos naturais. Com determinados fractais podemos produzir paisagens com montanhas, rios ou nuvens, com outros produzimos arvores ou folhas e com outros ainda, poderíamos gerar 'estranhas criaturas aquáticas' de um realismo preocupante.

Este tipo de questões e muitas outras, podem levar-nos a pensar, até que ponto, os princípios em que a Geometria Fractal se baseia não serão eles próprios, os princípios pelos quais se rege todo o Universo.

Perspectiva Prática

É a partir da referida aptidão para representar fenômenos naturais, que surgem as principais aplicações práticas dos fractais. Enunciaremos em seguida alguns exemplos:

- Aproveitando as características fractais de certas imagens, torna-se possível proceder à sua compressão, codificando em algumas regras simples toda a informação que contêm. Michael Barnsley desenvolveu sistemas que permitem compressões com razões até 10000 para 1 demonstrando esses mesmos sistemas através de uma seqüência de 40 minutos de imagens, contida num disquete de 1,4 MB.
- A superfície dos elétrodos de uma bateria, com a sua porosidade, possuem em termos gerais, uma característica tipicamente fractal que é a de manterem uma 'auto-semelhança' para diferentes

escalas de ampliação. Tal fato vai afetar as interações químicas e físicas que se processem em contacto com essa superfície modificando as leis tradicionais, tornando-se necessário o recurso a técnicas fractais.

- A criação de paisagens de outros planetas foi largamente utilizada em filmes como o 'Regresso de Jedi' ou 'Star Trek - 4'.
- Pode-se ainda referir a aplicação ao estudo de diversos fenômenos geológicos, nomeadamente na cartografia de falhas sísmicas.

De entre as várias perspectivas apresentadas, qualquer que seja a que mais nos atraia, temos de reconhecer a Geometria Fractal, como uma matéria multidisciplinar de grande interesse pelo que tentaremos expor o assunto de uma forma abrangente.

RESENHA HISTÓRICA

Se tivéssemos que escolher uma data exata para o começo da história dos fractais, optaríamos provavelmente pelo ano de 1975, em que Benoit Mandelbrot criava a palavra 'fractal' e preparava já a sua primeira obra sobre o assunto. Há, no entanto, uma série de acontecimentos anteriores, que sem os seus protagonistas o saberem, abriram caminho para que essa iniciativa pudesse surgir. É pois, por essa 'pré-história' que começaremos.

Entre a segunda metade do séc. XIX e a primeira do séc. XX, foram sendo propostos vários objetos matemáticos com características especiais e que foram, durante muito tempo, considerados 'monstros matemáticos', já que desafiavam as noções comuns de infinito e para os quais não havia uma explicação objetiva. Cantor (1845-1918) que se evidenciou com as suas idéias altamente inovadoras sobre o infinito, colocou o problema de uma linha à qual se removeria o seu terço médio, seguidamente o terço médio de cada um dos segmentos restantes e assim sucessivamente, gerando uma 'poeira' que sendo infinita, possuiria um comprimento total igual a zero. De igual modo, seria em 1904 apresentada a curva de von Koch que será alvo de uma análise mais detalhada no capítulo 'Geometria Fractal', e que sendo uma linha rodeada por uma área finita, possuiria um comprimento infinito.

Também em 1918, Gaston Julia e Pierre Fatou, viriam a apresentar um trabalho sobre processos iterativos envolvendo números complexos que mais tarde viriam a ser conhecidos como 'Conjuntos de Julia', mas que por na altura, as capacidades gráficas serem muito limitadas, não produziram qualquer imagem. No entanto, todos estes objetos matemáticos possuíam algumas características comuns aos fractais. Para além de bizarros e de conterem em si em si elementos infinitos, eram de certo modo iguais a si próprios quando ampliados. De referir ainda, a importância de um grande matemático, Poincaré (1854-1912) que foi provavelmente o primeiro e compreender e expor a noção de Caos, bem como um sem número de outros homens de Ciência que estabeleceram os princípios que estariam na base da descoberta dos fractais.

Foi, no entanto, a partir da segunda metade deste século, que os acontecimentos se começariam a suceder cada vez mais rapidamente. Edward Lorenz, um meteorologista americano dedicava-se em 1961, apoiado por um computador tanto quanto possível evoluído para a época, à ingrata tarefa de aumentar a confiabilidade das previsões meteorológicas. Certo dia, quando tentava repetir uma experiência, se enganou nos números que deveria introduzir no computador, truncando-lhe as suas casas decimais, deu-se conta de que os resultados finais eram significativamente diferentes dos que havia obtido anteriormente. Julgando inicialmente tratar-se de algum outro problema que desconhecia, viria a constatar que de fato, pequenas alterações dos valores iniciais provocavam enormes discrepâncias finais. A este fenômeno seria dado o nome de 'Efeito de Borboleta' pela possibilidade simbólica de o bater de asas de uma borboleta em Pequim poder provocar um tufão em Nova Iorque.

Pouco tempo depois, já na década de 70, James Yorke viria a encontrar nos trabalhos de Lorenz a chave para os problemas sobre os quais se debruçava, dando ao Caos o seu nome e juntamente com outros como May ou Hoppensteadt, divulgaria esta nova Ciência acabada de criar.

Chegamos então à altura em que, as condições estavam criadas para o aparecimento de uma figura invulgar como Benoit Mandelbrot.

Mandelbrot, que nasceu em Varsóvia em 1924 e se refugiou com a família em Paris em 1936, apesar de ter feito os seus estudos básicos de uma forma irregular, ingressou na École Politechnique a fim de receber formação universitária à data, imperava uma determinada maneira de estar que venerava o rigor e disciplina mentais como forma de encarar a Matemática, onde mesmo os gráficos eram banidos, pressupondo-se que o verdadeiro matemático não se deveria deixar influenciar pela componente subjetiva de uma imagem e que, antes pelo contrário, deveria conter em si uma capacidade de abstração, que aliada a uma notação devida, lhe permitiria produzir um trabalho rigoroso e honesto.

Mandelbrot porém, era totalmente avesso a este espírito. Em 1952 doutorou-se em Matemática pela Universidade de Paris e em 1958 emigraria uma vez mais, desta feita para os Estados Unidos, iniciando uma carreira pouco vulgar no Thomas J. Watson Research Center da IBM. Estudou a variação dos preços de algodão, desenvolveu um trabalho relacionado com a transmissão de ruído em linhas telefônicas, ensinou em Harvard e investigou a teoria dos jogos entre muitas outras atividades que se por um lado evidenciavam o seu ecletismo, por outro acusavam certa instabilidade, como que à procura de alguma coisa. Em particular, Mandelbrot debruçou-se sobre um problema antigo que questionava qual era efetivamente o comprimento de linha de costa de um país, o que como veremos adiante, contem alguns aspectos interessantes.

Esta e outras questões, estiveram na origem de toda uma teoria inovadora que viria a culminar no primeiro livro de Mandelbrot em 1977, que porém, não seria bem recebido pela comunidade científica. Só em 1982, com a publicação de 'The Fractal Geometry of Nature', este sairia do anonimato.

Entretanto, durante a década de 70, a Ciência do Caos dava importantes passos. Michel Hénon, um astrônomo do observatório de Nice, influenciado pelos trabalhos de Lorenz, estudava fenômenos caóticos associados à trajetória de estrelas através de uma galáxia. Mitchell Feigenbaum, do Laboratório Nacional de Los Alamos, a partir de equações simples, chegava a estranhos resultados sobre o comportamento de determinadas funções quando utilizadas de forma recursiva sendo conduzido tal como o Lorenz, Hénon e outros aos chamados 'atratores estranhos'.

Simultaneamente, Mandelbrot não desistia de divulgar as suas teorias e tentava controlar os acontecimentos com a sua personalidade reconhecidamente egocêntrica que freqüentemente provocava atritos, quanto aos nomes e méritos a atribuir às descobertas que se iam sucedendo. No entanto, uma coisa é certa, a Geometria Fractal' ia-se impondo como a 'Linguagem do Caos'. De referir ainda a contribuição do matemático John Hubbard que encarando o método de Newton segundo uma nova perspectiva e a de Michael Barnsley, inventor do 'Jogo do Caos', viriam a influenciar determinantemente o desenvolvimento da Geometria Fractal tal como a conhecemos hoje.

Muitos dos nomes atrás referidos, nomeadamente Mandelbrot, com os seus colaboradores e admiradores, encontram-se ainda hoje na vanguarda dos acontecimentos e constituem o motor do seu desenvolvimento.

CAOS

Este é um campo extremamente vasto que abrange diversas áreas da Ciência, pelo que limitar-nos-emos a expor sucintamente algumas idéias básicas. Começaremos por citar Poincaré, que em 1903 brilhantemente expôs as suas idéias sobre o assunto (A palavra 'caos', como hoje a entendemos, não era ainda utilizada).

"Uma causa muito pequena que escapa à nossa atenção provoca um efeito considerável que não podemos deixar de observar, e dizemos então que o efeito se deve ao acaso. Se conhecêssemos exatamente as leis da Natureza, e a situação do Universo no momento inicial, poderíamos prever exatamente qual a situação desse mesmo Universo num instante posterior. Mas mesmo se acontecesse que as leis naturais deixassem de ter segredos para nós, poderíamos, mesmo então conhecer a situação, apenas de modo aproximado. Se isso nos permitisse prever a situação seguinte com a mesma aproximação, o que é tudo o que precisamos, diriam que o fenômeno tinha sido previsto, que é controlado pelas leis conhecidas. Mas isto não ocorre sempre : pode acontecer que pequenas diferenças nas condições iniciais dêem origem a outras muito grandes nos fenômenos finais. Um erro pequeno no anterior, irá provocar um enorme erro no posterior. A previsão torna-se impossível, e temos assim, o fenômeno aleatório."

Quando pretendemos estudar qualquer fenômeno natural, iremos provavelmente desejar conhecê-lo o melhor possível a fim de podermos prever o seu comportamento, sendo assim levados a tentar representá-lo quer através de um modelo físico, quer de um modelo matemático. O primeiro caso, não é por vezes possível ou viável restando-nos o segundo, que por sua vez apresenta freqüentemente sérios problemas. De fato, muitos fenômenos físicos são representados através de equações diferenciais cuja solução não conseguimos obter de forma analítica. Aliás, os métodos e técnicas atualmente conhecidos aplicam-se apenas a um reduzido número de situações e assim, sempre que tal não acontece, diz-se estarmos perante situações de não-linearidade.

Ora é sobre alguns sistemas dinâmicos não-lineares que a Ciência do Caos se debruça. De entre estes, há os que possuem um comportamento estável, ou seja, quando submetidos a pequenas variações, produzirão igualmente pequenas diferenças no seu comportamento. O mesmo é dizer que se cometermos pequenos erros nas medições que fizermos sobre esse tipo de sistemas, eles reflectir-se-ão de uma forma desprezível durante a sua evolução. Sabemos por exemplo, que desde há muito que é possível prever com rigor a data de ocorrência de eclipses com centenas de anos de avanço. Porém se o pretendermos fazer com sistemas instáveis, como, por exemplo, com dados meteorológicos, ao fim de poucos dias, essa previsão será de tal modo diferente da realidade que podemos ser levados a pensar que o sistema possui alguma componente aleatória. No entanto, à luz desta nova perspectiva, o sistema é apenas 'caótico' e o conceito de aleatoriedade, tal como estamos habituados a encará-lo, não se aplica, preferindo-se o de **dependência sensível das condições iniciais**. Assim, o que se verificaria numa previsão meteorológica, seria o da amplificação exponencial dos erros que conduziria ao fim de pouco tempo a enormes discrepâncias entre a realidade e essa mesma previsão.

Poderemos até dizer, que mesmo que conhecêssemos com um enorme rigor o valor de todas as condições iniciais, ainda assim, haveria sempre lugar para a propagação de pequenas imperfeições que pelo fato de o sistema ser caótico, acabariam por tomar proporções significativas. O princípio de que sistemas deterministas simples podem comportar-se de forma imprevisível ou aparentemente aleatória, é, pois, o principal pilar daquilo que é conhecido como ‘Caos determinista’.

Debrucemo-nos agora sobre algumas das outras contribuições destes conceitos para a Ciência em geral. Assim, somos levados a concluir que nos encontramos, à partida, limitados quanto à profundidade com que poderemos vir a conhecer este tipo de fenômenos, por outro, dá-nos a esperança de poder vir a encontrar ordem onde até agora víamos apenas imprevisibilidade. Devemos, no entanto, ter presente, que só pelo fato de sabermos que um determinado fenômeno possui um comportamento caótico, isso não nos torna a previsão do seu comportamento, de uma forma direta, mais fácil, mas poderá ser de uma importância inestimável para a sua compreensão. Convém ainda distinguir entre fenômenos caóticos, e aleatórios ou simplesmente constituídos por ‘ruído’. Assim, surgem técnicas matemáticas e estatísticas, algumas bastante curiosas, cuja explicação excede o âmbito deste artigo, e que se destinam a, em face de um conjunto de valores experimentais, detectar a existência ou não, de uma ‘ordem caótica’ subjacente.

Imagine-se o exemplo de um jogo do qual não conhecemos as regras e que, portanto, faria os movimentos dos jogadores, parecerem destituídos de sentido a quem os observasse. Se, porém, as regras forem conhecidas, os movimentos passam a ter sentido, o que no entanto, não permite de uma forma direta, a sua previsão.

Outro fato a ter em consideração é o de que o próprio método científico é num caso destes afetado. Uma vez que as previsões em longo prazo são impossíveis, não devemos testar a validade de uma determinada teoria por comparação entre os valores obtidos teoricamente, e os experimentais, como é prática corrente, mas antes, deveremos debruçar-nos sobre as características gerais do sistema em causa, numa perspectiva geométrica e estatística.

Uma outra prática comum em Ciência, é a de encarar os sistemas em estudo numa perspectiva reducionista, ou seja, considerando que este pode ser dividido em múltiplos subsistemas em que o todo, será a soma das partes que o constituem. O Caos vem pôr em causa esta perspectiva afirmando que mesmo sistemas aparentemente simples e de pequena dimensão, podem ter um comportamento impreditível, o que se refletirá no comportamento do sistema global em que se encontram inseridos.

A fim de melhor ilustrar as idéias anteriores, vamos de seguida analisar um caso simples, considerando a seguinte equação: $P_{N+1} = rP_N (1 - P_N)$.

Esta fórmula pode ser um modo simplista de representar o crescimento de uma população animal, em que 'P' é a percentagem (normalizada entre 0 e 1) de indivíduos, relativamente a um valor imaginário (1) considerado como de alguma forma, um limite superior do crescimento dessa população, e 'r' uma constante que pode por exemplo representar a influência da quantidade de alimento disponível nesse ecossistema.

É uma fórmula iterativa em que o resultado de um cálculo é, de seguida, usado como valor inicial dessa mesma fórmula. De acordo com o quadro 1, podemos ver que para r = 0.5, essa população teria tendência para desaparecer, uma vez que 'P_N' tende para zero à medida que 'N' cresce. Para r = 1.5 ou r = 2.0, teria igualmente tendência para estabilizar, mas desta vez num determinado valor superior a zero, independentemente do valor inicial, constituindo o que os cientistas do Caos gostam de chamar um '**atrator estranho**'. Para valores de r = 3.1 e r = 3.5 a tendência, é desta vez para P_N oscilar entre respectivamente 2 e 4 valores. Finalmente para r = 4.0 e r = 4.5, o sistema torna-se imprevisível e caótico.

$\mathbf{P_{N+1} = r\, P_n\, (1 - P_N)}$

r	0.5	1.5	2.0	3.1	3.5	4.0	4.0
$\mathbf{P_{Ninic.}}$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.51
	0.125	0.375	0.5	0.775	0.875	1.000	1.000
	0.055	0.352	0.5	0.541	0.383	0.000	0.002
	0.026	0.342	0.5	0.770	0.827	0.000	0.006
	0.013	0.338	0.5	0.549	0.501	0.000	0.025
	0.006	0.335	0.5	0.768	0.875	0.000	0.099
	0.003	0.334	0.5	0.553	0.383	0.000	0.357
	0.002	0.334	0.5	0.766	0.827	0.000	0.918
	0.001	0.333	0.5	0.555	0.501	0.000	0.302
	0.000	0.333	0.5	0.766	0.875	0.000	0.843
	0.000	0.333	0.5	0.556	0.383	0.000	0.530
	0.000	0.333	0.5	0.765	0.827	0.000	0.996
	0.000	0.333	0.5	0.557	0.501	0.000	0.015
	0.000	0.333	0.5	0.765	0.875	0.000	0.058
	0.000	0.333	0.5	0.557	0.383	0.000	0.220

Quadro 1

O diagrama da figura 1, conhecido pelo nome de **bifurcação**, mostra o que acabamos de dizer. Este diagrama pode ser obtido da seguinte maneira: Escolhe-se um valor qualquer entre 0 e 1 para 'P_N' e um valor concreto para 'r' que constitui o valor a analisar. Seguidamente, resolve-se a equação obtendo um determinado P_{N+1}, que será de seguida usado como sendo P_N, repetindo-se esta operação,digamos 200 vezes, por forma a eliminar os valores transientes. Agora, para um determinado valor de r, nas abscissas, marquem-se os sucessivos valores que P_N irá tomar, nas ordenadas, para as seguintes, digamos, 300 iterações.

Assim, se P_N tiver tendência para estabilizar num determinado valor, marcaremos o ponto correspondente 300 vezes, se pelo contrário, forem sendo sucessivamente diferentes marcaremos tantos, quantos os diferentes valores de P_N. Finalmente, repetir-se-ia a operação para sucessivos valores de r. Para r = 3.5, como foi referido, P_N oscilará em torno de 4 valores pelo que marcaríamos os 4 pontos, 75 vezes cada um. Este seria o método a usar, se quiséssemos utilizar um computador para fazê-lo. Obviamente que, caso o leitor optasse por fazê-lo à mão, bastaria marcar cada ponto repetido apenas uma vez.

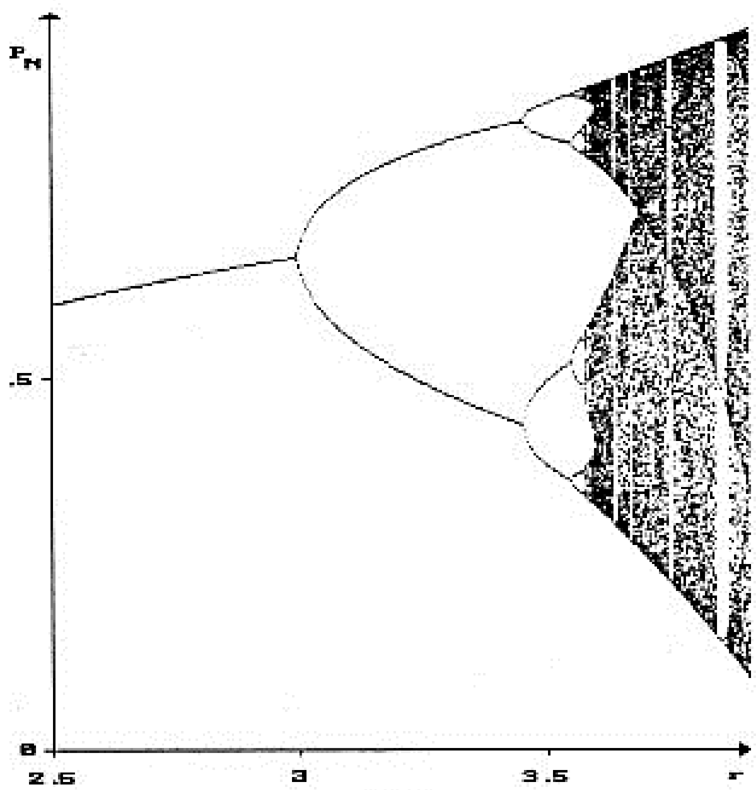

FIG. 1

Diagrama de 'Bifurcação'

Note-se que a partir de certa altura, mais precisamente para r > 3.56994571869, podemos observar um amontoado de pontos sem nexo, vislumbrando-se por vezes zonas onde o sistema volta a ter um comportamento estável.

Há ainda dois aspectos interessantes e que vão ser alvo de desenvolvimento no próximo capítulo. O primeiro, é o fato de o diagrama possuir certa auto-semelhança. Repare-se que após a primeira bifurcação, surgem outras, formando uma série de 'montes', constituindo um padrão que se repete indefinidamente, e que de certo modo são iguais ao próprio diagrama considerado como um todo.

Quanto ao segundo, temos que, à medida que formos ampliando o diagrama, (através da diminuição dos intervalos de variação de r e P_N) irão surgindo novos conjuntos de pontos não observáveis em ampliações menores.

O comportamento caótico deste sistema simples constitui apenas um exemplo de um universo muito vasto de situações cujos princípios se assemelham a este. Nomeadamente, em vez de uma equação, poderíamos ter um conjunto de duas ou mais, como é o caso dos **mapas de Hénon** (tradução pouco correta do inglês 'map' que, entretanto, se generalizou), que foram usadas por este astrônomo para representar situações tais como o movimento de asteróides. Poderíamos ainda envolver números complexos, funções trigonométricas e transcendentes, módulos e um sem número de outras formas que produzissem situações caóticas, reproduzindo-as em diagramas apropriados e que teriam uma coisa em comum, como veremos a seguir: o fato de serem fractais.